Wrocław, wrzesień 2026

Logika i Struktury Formalne

PRZEMYSŁAW SZCZEPANIAK
Informatyka Algorytmiczna
Wydział Informatyki i Telekomunikacji PWr
2026/2027

ZDANIA

1. Udowodnij prawa rachunku zdań poznane na wykładzie.

2. Sprawdź, które z poniższych zdań są tautologiami
(a) $p \vee q \vee r \longrightarrow (\neg p \longrightarrow (q \vee r) \wedge \neg r)$,
(b) $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \longrightarrow (p \wedge s \longrightarrow q \vee r)$,
(c) $(p \vee q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r) \vee (q \longrightarrow r)$,
(d) $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q \longleftrightarrow p)$,
(e) $(p \vee q \longleftrightarrow r \vee s) \longrightarrow (p \longleftrightarrow r) \vee (q \longleftrightarrow s)$,
(f) $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$.

3. Zaneguj zdania z przykładów **(a)**, **(b)**, **(c)** zadania **2**. Korzystając z praw de Morgana, przekształć je do postaci, w której negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

4. Sprawdź metodą skróconą, które z poniższych zdań są tautologiami
(a) $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$,
(b) $(p \longrightarrow (q \longrightarrow r)) \longrightarrow ((p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$,
(c) $(\neg p \longrightarrow \neg q) \longrightarrow ((\neg p \longrightarrow q) \longrightarrow p)$,
(d) $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$.

5. Oto fragment raportu policji sporządzonego przez młodego aspiranta:

> *Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.*

Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu, poza oczywistym faktem, że należy zwolnić aspiranta? Spróbuj odpowiedzieć na pytania: *Czy świadek był zastraszony? Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy testament odnaleziono?*

6. Sprawdź, czy poniższe rozumowania są poprawne:
(a) Jeżeli Jan ożeni się z Marią, to Piotr go znienawidzi. Jeżeli Piotr ożeni się z Marią, to Jan go znienawidzi. Zatem Piotr znienawidzi Jana lub Jan znienawidzi Piotra.
(b) Jeżeli występuje spięcie w przewodzie elektrycznym, to światło gaśnie. Światło nie gaśnie. Zatem nie występuje spięcie w przewodzie elektrycznym.
(c) Jeśli ceny wzrosną, to spadnie popyt. Jeśli popyt spadnie, to spadną ceny. Zatem jeśli ceny wzrosną, to spadną. Zatem ceny spadną.
(d) Jeśli pacjent ma zapalenie oskrzeli, to zastosowanie antybiotyków przyniesie poprawę. Jeśli pacjent ma zapalenie płuc, to zastosowanie antybiotyków przyniesie poprawę. Pacjent ma zapalenie oskrzeli lub zapalenie płuc. Zatem zastosowanie antybiotyków przyniesie poprawę.

7. Zdefiniuj spójnik $\longrightarrow$ jedynie za pomocą **(a)** $\neg,\ \vee$, **(b)** $\neg,\ \wedge$.

8. Zdefiniuj spójnik równoważności $\longleftrightarrow$ jedynie za pomocą **(a)** $\neg,\ \wedge,\ \vee$, **(b)** $\neg,\ \longrightarrow$.

9. Definiujemy spójnik Sheffera, tzw. *NAND* jako $\varphi \uparrow \psi = \neg(\varphi \wedge \psi)$. Zdefiniuj za pomocą samego $\uparrow$ spójniki $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \longrightarrow$.

10. Udowodnij, że jeśli φ jest zdaniem zbudowanym wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\wedge$ i $\vee$, to dla dowolnej waluacji v, która wszystkim zmiennym zdaniowym występującym w φ przypisuje $\mathbb{0}$ mamy $\bar{v}(\varphi) = \mathbb{0}$.

11.* Udowodnij, że za pomocą jedynie zmiennych zdaniowych oraz spójników $\wedge$ i $\vee$ nie można zdefiniować **(a)** $\neg$, **(b)** $\longrightarrow$.

ZBIORY

12. Udowodnij prawa rachunku zbiorów poznane na wykładzie.

13. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D
(a) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \longrightarrow A \subseteq C$,
(b) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \longrightarrow A \cup B \subseteq C$,
(c) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \longrightarrow A \subseteq B \cap C$,
(d) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$,
(e) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$.

14. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B następujące warunki są równoważne **(a)** $A \subseteq B$, **(b)** $A \cap B = A$, **(c)** $A \cup B = B$.

15. Pokaż, że $A \cup B$ jest najmniejszym w sensie inkluzji zbiorem zawierającym jednocześnie zbiory A i B. Sformułuj i udowodnij analogiczny fakt dla przekroju dwóch zbiorów.

16. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C
(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

17. Pokaż, że **(a)** $A \triangle \emptyset = A$, **(b)** $A \triangle A = \emptyset$, **(c)** $A \triangle B = B \triangle A$, **(d)** $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ dla dowolnych zbiorów A, B, C.

18. Rozwiąż równanie $[0, 1] \triangle X = [-1, \frac{1}{2})$.

19. Czy $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ dla dowolnych zbiorów A, B, C?

20. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C
(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

21. Wyznacz zbiory **(a)** $P(\emptyset)$, **(b)** $P(P(\emptyset))$, **(c)** $P(\{1, 2, 3\})$, **(d)** $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

22. Pokaż, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) \subseteq P(B)$.

23. Czy dla dowolnych zbiorów A, B
(a) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$,
(b) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$?

KWANTYFIKATORY

24. Używając jedynie liczb naturalnych, zmiennych zdaniowych, nawiasów, spójników $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, kwantyfikatorów $\exists$, $\forall$, symboli $=, \neq, \in, <, \leqslant, +, -, \cdot, |, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ oraz podanych niżej wzorów ciągów, zapisz formuły
(a) istnieje nieparzysta liczba naturalna,
(b) nie ma największej liczby naturalnej,
(c) niektóre liczby naturalne są pierwsze,
(d) każda liczba naturalna daje przy dzieleniu przez 2 resztę 0 lub 1,
(e) x jest najmniejszą liczbą naturalną,
(f) wśród liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza,
(g) suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych jest zawsze nieujemna,
(h) równanie $x^2 + x + 4 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych,
(i) równanie $x^2 - x - 2 = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania całkowite,
(j) równanie $2x + a = 0$ ma rozwiązanie całkowite dla dowolnego całkowitego a,
(k) dla dwóch (różnych) liczb rzeczywistych dodatnich ich średnia arytmetyczna jest mniejsza niż średnia geometryczna,
(l) liczba z jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych x i y,
(m) każde dwie liczby naturalne mają najmniejszą wspólną wielokrotność,
(n) istnieje dokładnie jedna nieparzysta liczba naturalna,
(o) liczba 2 nie jest kwadratem żadnej liczby wymiernej,
(p) ciąg $a_n = n \cos n\pi$ jest ograniczony z góry,
(r) ciąg $a_n = n^2$ jest rozbieżny do ∞,
(s) ciąg $a_n = \frac{n}{n+2}$ jest zbieżny do 1.

25. Zaprzecz formułom z zadania **24**. Czy zdania z zadania **24** są prawdziwe?

26. Dla zmiennych o zakresie $\mathbb{N}$ wprowadzamy kwantyfikatory $\forall^\infty$ i $\exists^\infty$ następująco:

$$(\forall^\infty n)(\varphi(n)) \iff (\exists k)(\forall n \geqslant k)(\varphi(n)),$$
$$(\exists^\infty n)(\varphi(n)) \iff (\forall k)(\exists n \geqslant k)(\varphi(n)).$$

Czytamy je odpowiednio *dla prawie wszystkich* n i *istnieje nieskończenie wiele* n.
(a) Sformułuj, używając tych kwantyfikatorów, pojęcie granicy ciągu i punktu skupienia ciągu.
(b) Sformułuj i udowodnij prawa de Morgana dla tych kwantyfikatorów.

27. Przedstaw graficznie zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y)\}$, jeśli $\varphi(x,y)$ to funkcja zdaniowa **(a)** $x < y$, **(b)** $x \leqslant y$, **(c)** $x \cdot y < 1$, **(d)** $|x \cdot y| \leqslant 1$, **(e)** $|x+y| < 1$, **(f)** $x \cdot y \leqslant 1 \longrightarrow x \cdot y = 1$.

28. Sprawdź, czy dla funkcji zdaniowych z zadania **27**, w których zakresem zmiennych jest $\mathbb{R}$, prawdziwe są zdania $(Q_1 x)(Q_2 y)(\varphi(x,y))$, gdzie $Q_1, Q_2 \in \{\exists, \forall\}$.

29. Udowodnij prawa rachunku kwantyfikatorów poznane na wykładzie.

30. Pokaż, że $\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{B}$ dla dowolnych rodzin zbiorów $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

31. Pokaż, że $\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \bigcup \mathcal{A} \cap \bigcup \mathcal{B}$ dla dowolnych rodzin zbiorów $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Wykaż, że równość jest możliwa, ale inkluzji w tym wzorze nie można ogólnie zastąpić równością.

32. Pokaż, że $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$. Dlaczego zakładamy, że $\mathcal{A} \neq \emptyset$?

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

33. Udowodnij, że
(a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$,
(b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$,
(c) $2^n < n!$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 4$,
(d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$,
(e) $8 \mid 5^{2n-1} + 3$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$,
(f) $25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ dla każdego naturalnego n,
(g) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla dowolnych naturalnych $n \geqslant 1$ oraz rzeczywistych $x > -1$ (*nierówność Bernoulliego*),
(h) $p_n > 3n$ dla każdego naturalnego $n \geqslant 12$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą, czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$,
(i) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ dla dowolnych n liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
(j) każda liczba naturalna $n \geqslant 1$ jest sumą parami różnych potęg liczby 2 o wykładnikach naturalnych.

RELACJE

34. Zbadaj, czy relacja R jest zwrotna, przeciwzwrotna, symetryczna, słabo antysymetryczna, mocno antysymetryczna, przechodnia, spójna, jeśli
(a) $xRy \longleftrightarrow x$ *jest tej samej płci co* y, na zbiorze ludzi,
(b) $xRy \longleftrightarrow x$ *jest bratem* y, na zbiorze ludzi,
(c) $xRy \longleftrightarrow x < y$, na $\mathbb{R}$,
(d) $xRy \longleftrightarrow x \leqslant y$, na $\mathbb{R}$,
(e) $xRy \longleftrightarrow x|y$, na $\mathbb{N}$,
(f) $xRy \longleftrightarrow x|y$, na $\mathbb{Z}$,
(g) $xRy \longleftrightarrow x \subseteq y$, na $P(\mathbb{R})$,
(h) $xRy \longleftrightarrow x \cap y = \emptyset$, na $P(\mathbb{R})$,
(i) $xRy \longleftrightarrow 2|x+y$, na $\mathbb{N}$,
(j) $xRy \longleftrightarrow |x| < |y|$, na $\mathbb{R}$,
(k) $xRy \longleftrightarrow x + y \geqslant 2$, na $\mathbb{R}$?

35. Zbadaj, czy każdą relację R na X można rozszerzyć do relacji **(a)** zwrotnej, **(b)** przeciwzwrotnej, **(c)** symetrycznej, **(d)** słabo antysymetrycznej, **(e)** mocno antysymetrycznej, **(f)** przechodniej, **(g)** spójnej na X.

36. Podaj przykład relacji, która
(a) jest zwrotna, symetryczna i nie jest przechodnia,
(b) jest zwrotna, słabo antysymetryczna i nie jest przechodnia,
(c) jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna,
(d) jest słabo antysymetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna.

37. Ile na zbiorze n-elementowym jest relacji **(a)** zwrotnych, **(b)** symetrycznych, **(c)** zwrotnych i symetrycznych, **(d)** mocno antysymetrycznych, **(e)** słabo antysymetrycznych?

38. Niech $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\}$. Narysuj relację $R \circ S$.

39. Pokaż, że relacja R jest
(a) symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$,
(b) przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$.

FUNKCJE

40. Pokaż, że funkcje $f,\ g$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, g$ i $(\forall x \in \mathrm{dom}\, f)(f(x) = g(x))$.

41. Niech $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Pokaż, że relacja $g \circ f$ jest funkcją, $\mathrm{dom}(g \circ f) = X$ i $\mathrm{rng}(g \circ f) \subseteq Z$.

42. Niech $f,\ g \subseteq \mathbb{R}^2$ będą funkcjami o wzorach $f(x) = \sqrt{x-1},\ g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ określonymi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, dla których wzory te mają sens. Podaj dziedziny funkcji $f,\ g$. Określ, podając wzory i dziedziny, złożenia **(a)** $f \circ g$, **(b)** $g \circ f$.

43. Niech $X \neq \emptyset$. Wyznacz zbiory **(a)** $\emptyset^\emptyset$, **(b)** $X^\emptyset$, **(c)** $\emptyset^X$.

44. Pokaż, że jeśli $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ są funkcjami takimi, że $g \circ f$ jest różnowartościowa i f jest na Y, to g jest funkcją różnowartościową. Czy założenie, że f jest „na" jest istotne?

45. Pokaż, że jeśli f, g są funkcjami, to relacja $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy $f \restriction (\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g) = g \restriction (\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g)$.

46. Niech funkcja $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie określona wzorem $f(n,k) = nk$.
(a) Czy f jest różnowartościowa?
(b) Czy f jest „na"?
(c) Znajdź $f[\{2,4\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}]$.
(d) Znajdź $f[\{2\} \times \{2^n : n \in \mathbb{N}\}]$.
(e) Znajdź $f^{-1}[\{4,5\}]$.

47. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
(a) Czy f jest injekcją?
(b) Czy f jest surjekcją?
(c) Znajdź $f[\mathbb{R} \times \{0\}]$.
(d) Znajdź $f^{-1}[\{(1,1)\}]$.
(e) Znajdź $f[L]$ oraz $f^{-1}[L]$, gdzie L jest prostą o równaniu $y = x + 1$.

48. Niech $f : X \longrightarrow Y$. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów $A, A_1, A_2 \in P(X)$, oraz B, B_1, B_2
(a) $f[A_1 \setminus A_2] \supseteq f[A_1] \setminus f[A_2]$,
(b) $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$,
(c) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$,
(d) $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.

49. Znajdź przykłady pokazujące, że inkluzji w zadaniu **48** nie można zastąpić równością.

50. Pokaż, że $f : X \longrightarrow Y$ jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ dla dowolnych zbiorów $A, B \in P(X)$.